Научная статья
УДК 512.54, 512.544.4
DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-50-62

ГРУППА ОБОБЩЁННЫХ ТРАНСПОЗИЦИЙ КЛАССОВ И ЕЁ АВТОМОРФИЗМЫ

Михаил Владимирович Нещадим[1]
Сергей Михайлович Нещадим[2]

[1,2]Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН
Новосибирск, Россия,

[1]neshch@math.nsc.ru
[2]s.neshchadim@g.nsu.ru

Аннотация

В работе вводится группа $ECT(\mathbb{Z})$, порожденная обобщенными транспозициями классов. Показано, что автоморфизм С.Коля группы $CT(\mathbb{Z})$ индуцирован внутренним автоморфизмом группы $Sym(\mathbb{Z})$ и представим в виде произведения двух автоморфизмов группы $Sym(\mathbb{Z})$ — сдвига на 1 и отражения относительно 0. Найдены формулы действия этих автоморфизмов на порождающих группы $ECT(\mathbb{Z})$.

Ключевые слова и фразы

подстановка, транспозиция классов, инволюция, автоморфизм, проблема Коллатца .

Источник финансирования

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00119, https://rscf.ru/project/24-11-00119/

Для цитирования

Нещадим М.В., Нещадим С.М. Группа обобщенных транспозиций классов и ее автоморфизмы // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 3, С. 50-62. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-50-62

The group of generalized transposition classes and its automorphisms

Mikhail V. Neshchadim[1], **Sergey M. Neshchadim**[2]

[1,2]Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

[1]neshch@math.nsc.ru
[2]s.neshchadim@g.nsu.ru

Abstract

In this paper, we introduce the group $ECT(\mathbb{Z})$ generated by generalized class transpositions. It is shown that the S. Kohl automorphism of the group $CT(\mathbb{Z})$ is induced by an inner automorphism of the group $Sym(\mathbb{Z})$ and can be represented as a product of two automorphisms of the group $Sym(\mathbb{Z})$ — a shift by 1 and a mirroring with respect to 0. We find formulas for the action of these automorphisms on generators of the group $ECT(\mathbb{Z})$.

Keywords

substitution, class transposition, involution, automorphism, Collatz problem.

Funding

The work was supported by the Russian Science Foundation, project 24-11-00119, https://rscf.ru/en/project/24-11-00119/

For citation

Neshchadim M. V., Neshchadim S. M., The group of generalized transposition classes and its automorphisms // *Mat. Trudy*, 2025, T. 28, № 3, C. 50-62. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-50-62

§ 1. Введение и постановка задачи

В работе С. Коля [1] дано следующее определение. Пусть $m \geq 2$ натуральное число. Тогда для всякого целого r, удовлетворяющего неравенствам $0 \leq r \leq m-1$ положим

$$r(m) = r + m\mathbb{Z} = \{r + km | k \in \mathbb{Z}\}.$$

При $r_1(m_1) \cap r_2(m_2) = \emptyset$ определим транспозицию классов $\tau_{r_1(m_1), r_2(m_2)}$ как инволюцию, переставляющую числа $r_1 + km_1$ и $r_2 + km_2$ для каждого

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 50-62
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 50-62

целого k и оставляющую остальные целые числа неподвижными. Таким образом транспозиция классов является элементом порядка 2 бесконечной симметрической группы $Sym(\mathbb{Z})$ всех перестановок множества целых чисел $\mathbb{Z}$. Через $CT(\mathbb{Z})$ обозначим группу, порожденную всеми транспозициями классов. Транспозицию классов $\tau_{r_1(m_1),r_2(m_2)}$ будем записывать следующим образом

$$\tau_{r_1(m_1),r_2(m_2)} = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(r_1 + km_1, r_2 + km_2)$$

как произведение независимых циклов длины два.

Изучение автоморфизмов групп подстановок составляет классическое направление исследований в теории групп. Для конечных групп подстановок S_n известен такой результат. При $n \neq 6$ всякий автоморфизм группы S_n внутренний. Для группы S_6 существует не внутренний автоморфизм. Следующий вопрос был сформулирован в Коуровской тетради [2]. Вопрос 17.57 (С. Коль). Верно ли, что группа внешних автоморфизмов группы $CT(\mathbb{Z})$ изоморфна циклической группе порядка 2, которая порождается автоморфизмом

$$\varphi : \sigma \mapsto \sigma^{n\mapsto -n-1}?$$

Автоморфизм φ (который естественно назвать автоморфизмом Коля) действует на подстановку $\sigma \in CT(\mathbb{Z})$ следующим образом: если σ представлена в виде произведения независимых циклов, то $\varphi(\sigma)$ получается из σ заменой n на $-n-1$ для всех целых n. На транспозицию классов автоморфизм φ действует следующим образом:

$$\varphi(\tau_{r_1(m_1),r_2(m_2)}) = \varphi\left(\prod_{k\in\mathbb{Z}}(r_1 + km_1, r_2 + km_2)\right) =$$

$$= \prod_{k\in\mathbb{Z}}(-r_1 - km_1 - 1, -r_2 - km_2 - 1) =$$

$$= \prod_{k\in\mathbb{Z}}((m_1 - r_1 - 1) + m_1(-k-1), (m_2 - r_2 - 1) + m_2(-k-1)) =$$

$$= \prod_{l\in\mathbb{Z}}((m_1 - r_1 - 1) + m_1 l, (m_2 - r_2 - 1) + m_2 l) =$$

$$= \tau_{m_1-r_1-1(m_1),m_2-r_2-1(m_2)}.$$

Итак,

$$\varphi(\tau_{r_1(m_1),r_2(m_2)}) = \tau_{m_1-r_1-1(m_1),m_2-r_2-1(m_2)}.$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 50-62
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 50-62

Нетрудно заметить, что автоморфизм φ можно представить в виде произведения отображений $\varphi = \psi\theta$, где

$$\theta(n) = n + 1, \quad \psi(n) = -n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отображения ψ, θ являются автоморфизмами группы $Sym(\mathbb{Z})$, но не являются автоморфизмами группы $CT(\mathbb{Z})$. Мы указываем порождающее множество (обобщенные транспозиции классов)

$${}_l\tau_{r_1(n_1),r_2(n_2)} = \prod_{k\in\mathbb{Z}} (r_1 + kn_1, r_2 + (k-l)n_2),$$

где $l \in \mathbb{Z}$, наименьшей подгруппы группы $Sym(\mathbb{Z})$, которая содержит группу $CT(\mathbb{Z})$ и выдерживает действие автоморфизмами ψ, θ. (Такую подгруппу в группе $Sym(\mathbb{Z})$ естественно назвать замыканием группы $CT(\mathbb{Z})$ относительно группы, порожденной автоморфизмами ψ, θ.) Находим формулы действия автоморфизмами ψ, θ на обобщенных транспозициях классов. В качестве приложения полученных формул находим орбиты обобщенных подстановок Коля ${}_l\tau_{0(2),1(2)}$, ${}_l\tau_{1(2),2(4)}$, ${}_l\tau_{1(4),2(6)}$ под действием группы $A_0 = \langle \psi, \theta \rangle$. В заключении формулируются некоторые вопросы для дальнейшего исследования.

§ 2. Группа обобщенных транспозиций классов

Предварительно сделаем несколько замечаний.

Замечание 1. Если

$$a = \prod_{n\geq 1} (-n, n-1),$$

то действие автоморфизма Коля φ совпадает с сопряжением подстановкой a:

$$\varphi(\sigma) = a\sigma a^{-1}, \quad \sigma \in Sym(\mathbb{Z}).$$

Это непосредственно следует из формулы сопряжения:

$$\begin{pmatrix} \dots & i_1 & i_2 & \dots & i_k & \dots \\ \dots & j_1 & j_2 & \dots & j_k & \dots \end{pmatrix} (\dots i_1 i_2 \dots i_k \dots) \begin{pmatrix} \dots & j_1 & j_2 & \dots & j_k & \dots \\ \dots & i_1 & i_2 & \dots & i_k & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= (\dots j_1 j_2 \dots j_k \dots)$$

и из вида подстановки a:

$$a = \begin{pmatrix} \dots & n & \dots \\ \dots & -n-1 & \dots \end{pmatrix}.$$

Следовательно, φ — внутренний автоморфизм группы $Sym(\mathbb{Z})$.

Отметим, что отображение, задаваемое подстановкой a на целых числах продолжается до отображения на множество вещественных чисел

$$A(x) = -1 - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

При этом $A(-1/2) = -1/2$.

Замечание 2. Введем отображения θ, $\psi \in Sym(\mathbb{Z})$:

$$\theta(n) = n + 1, \quad \psi(n) = -n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$\psi\theta(n) = -n - 1,$$

следовательно, автоморфизм Коля является композицией

$$\varphi = \psi\theta.$$

Отметим, что θ — элемент бесконечного порядка, а ψ — элемент второго порядка группы $Sym(\mathbb{Z})$. Так как $(\psi\theta)^2 = 1$, то группа порожденная элементами θ, ψ изоморфна бесконечной группе диэдра

$$D_\infty = \left\langle x, y \,|\, x^2 = 1, \ xyx = y^{-1} \right\rangle.$$

Расширим группу $CT(\mathbb{Z})$, добавив следующие подстановки

$${}_l\tau_{r_1(n_1), r_2(n_2)} = \prod_{k \in \mathbb{Z}} (r_1 + kn_1, r_2 + (k - l)n_2),$$

где $l \in \mathbb{Z}$. Если $l = 0$, то

$${}_0\tau_{r_1(n_1), r_2(n_2)} = \tau_{r_1(n_1), r_2(n_2)}.$$

Корректность определения при этом не теряется, так как $(r_1 + n_1\mathbb{Z}) \cap (r_2 + n_2\mathbb{Z}) = \emptyset$. Отметим также, что по той же причине нет элементов вида ${}_l\tau_{0(n_1), 0(n_2)}$. Группу порожденную всеми подстановками вида ${}_l\tau_{r_1(n_1), r_2(n_2)}$ обозначим через $ECT(\mathbb{Z})$ и будем называть группой обобщенных транспозиций классов.

Далее найдем формулы действия автоморфизмов θ, ψ на элементах ${}_l\tau_{r_1(n_1), r_2(n_2)}$, а именно, имеет место следующая теорема.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 50-62
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 50-62

Теорема. *Справедливы следующие формулы*

1) $\psi({}_l\tau_{0(n_1),r_2(n_2)}) = {}_{1-l}\tau_{0(n_1),n_2-r_2(n_2)}$, *если* $1 \le r_2 < n_2$,

2) $\psi({}_l\tau_{r_1(n_1),r_2(n_2)}) = {}_{-l}\tau_{n_1-r_1(n_1),n_2-r_2(n_2)}$, *если* $1 \le r_1 < n_1$, $1 \le r_2 < n_2$,

3) $\psi({}_l\tau_{r_1(n_1),0(n_2)}) = {}_{-l-1}\tau_{n_1-r_1(n_1),0(n_2)}$, *если* $1 \le r_1$,

4) $\theta({}_l\tau_{r_1(n_1),r_2(n_2)}) = {}_l\tau_{r_1+1(n_1),r_2+1(n_2)}$, *если* $0 \le r_1 \le n_1 - 2$, $0 \le r_2 \le n_2 - 2$,

5) $\theta({}_l\tau_{n_1-1(n_1),r_2(n_2)}) = {}_{l+1}\tau_{0(n_1),r_2+1(n_2)}$, *если* $0 \le r_2 \le n_2 - 2$,

6) $\theta({}_l\tau_{r_1(n_1),n_2-1(n_2)}) = {}_{l-1}\tau_{r_1+1(n_1),0(n_2)}$, *если* $1 \le r_1 \le n_1 - 2$,

7) $\theta^{-1}({}_l\tau_{r_1(n_1),r_2(n_2)}) = {}_l\tau_{r_1-1(n_1),r_2-1(n_2)}$, *если* $r_1 \ge 1$, $r_2 \ge 1$,

8) $\theta^{-1}({}_l\tau_{0(n_1),r_2(n_2)}) = {}_{l-1}\tau_{n_1-1(n_1),r_2-1(n_2)}$, *если* $r_2 \ge 1$,

9) $\theta^{-1}({}_l\tau_{r_1(n_1),0(n_2)}) = {}_{l+1}\tau_{r_1-1(n_1),n_2-1(n_2)}$, *если* $r_1 \ge 1$.

Доказательство. При действии автоморфизмом ψ на элемент ${}_l\tau_{r_1(n_1),r_2(n_2)}$ получаем

$$\psi({}_l\tau_{r_1(n_1),r_2(n_2)}) = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(-r_1 - kn_1, -r_2 - (k-l)n_2) =$$

$$= \prod_{k\in\mathbb{Z}}(-r_1 + kn_1, -r_2 + (k+l)n_2).$$

Если $r_1 = 0$, $1 \le r_2 < n_2$, то

$$\prod_{k\in\mathbb{Z}}(-r_1 + kn_1, -r_2 + (k+l)n_2) = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(kn_1, n_2 - r_2 + (k+l-1)n_2) =$$

$$= {}_{1-l}\tau_{0(n_1),n_2-r_2(n_2)}.$$

Если $1 \le r_1 < n_1$, $1 \le r_2 < n_2$, то

$$\prod_{k\in\mathbb{Z}}(-r_1+kn_1, -r_2+(k+l)n_2) = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(n_1-r_1+(k-1)n_1, n_2-r_2+(k+l-1)n_2) =$$

$$= \prod_{k\in\mathbb{Z}}(n_1 - r_1 + kn_1, n_2 - r_2 + (k+l)n_2) = {}_{-l}\tau_{n_1-r_1(n_1),n_2-r_2(n_2)}.$$

Если $1 \le r_1 < n_1$, $r_2 = 0$, то

$$\prod_{k\in\mathbb{Z}}(-r_1 + kn_1, -r_2 + (k+l)n_2) = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(-r_1 + kn_1, (k+l)n_2) =$$

$$= \prod_{k\in\mathbb{Z}}(n_1 - r_1 + (k-1)n_1, (k-1+l+1)n_2) = {}_{-l-1}\tau_{n_1-r_1(n_1),0(n_2)}.$$

При действии автоморфизмом θ на элемент ${}_l\tau_{r_1(n_1),r_2(n_2)}$ получаем

$$\theta({}_l\tau_{r_1(n_1),r_2(n_2)}) = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(r_1 + 1 + kn_1, r_2 + 1 + (k-l)n_2).$$

Если $r_1 \le n_1 - 2$, $r_2 \le n_2 - 2$, то

$$\prod_{k\in\mathbb{Z}}(r_1+1+kn_1, r_2+1+(k-l)n_2) = {}_l\tau_{r_1+1(n_1),r_2+1(n_2)}.$$

Если $r_1 = n_1 - 1$, $r_2 \le n_2 - 2$, то

$$\prod_{k\in\mathbb{Z}}(r_1+1+kn_1, r_2+1+(k-l)n_2) = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(n_1+kn_1, r_2+1+(k-l)n_2) =$$

$$= \prod_{k\in\mathbb{Z}}((k+1)n_1, r_2+1+(k+1-l-1)n_2) = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(kn_1, r_2+1+(k-l-1)n_2) =$$
$$= {}_{l+1}\tau_{0(n_1),r_2+1(n_2)}.$$

Если $r_1 \le n_1 - 2$, $r_2 = n_2 - 1$, то

$$\prod_{k\in\mathbb{Z}}(r_1+1+kn_1, r_2+1+(k-l)n_2) = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(r_1+1+kn_1, n_2+(k-l)n_2) =$$

$$= \prod_{k\in\mathbb{Z}}(r_1+1+kn_1, (k+1-l)n_2) = {}_{l-1}\tau_{r_1+1(n_1),0(n_2)}.$$

Найдем действие θ^{-1}. Имеем

$$\theta^{-1}({}_l\tau_{r_1(n_1),r_2(n_2)}) = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(r_1-1+kn_1, r_2-1+(k-l)n_2).$$

Если $r_1 \ge 1$, $r_2 \ge 1$, то

$$\theta^{-1}({}_l\tau_{r_1(n_1),r_2(n_2)}) = {}_l\tau_{r_1-1(n_1),r_2-1(n_2)}.$$

Если $r_1 = 0$, $r_2 \ge 1$, то

$$\theta^{-1}({}_l\tau_{0(n_1),r_2(n_2)}) = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(-1+kn_1, r_2-1+(k-l)n_2) =$$

$$= \prod_{k\in\mathbb{Z}}(n_1-1+(k-1)n_1, r_2-1+(k-l)n_2) =$$

$$= \prod_{k\in\mathbb{Z}}(n_1-1+(k-1)n_1, r_2-1+(k-1-(l-1))n_2) =$$
$$= {}_{l-1}\tau_{n_1-1(n_1),r_2-1(n_2)}.$$

Если $r_1 \ge 1$, $r_2 = 0$, то

$$\theta^{-1}({}_l\tau_{r_1(n_1),0(n_2)}) = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(r_1-1+kn_1, -1+(k-l)n_2) =$$

$$= \prod_{k\in\mathbb{Z}} (r_1 - 1 + kn_1, n_2 - 1 + (k - l - 1)n_2) =$$

$$= {}_{l+1}\tau_{r_1-1(n_1),n_2-1(n_2)}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что из найденных формул следует, что группа $ECT(\mathbb{Z})$ является наименьшей подгруппой группы $Sym(\mathbb{Z})$, которая содержит подгруппу $CT(\mathbb{Z})$ и инвариантна относительно автоморфизмов ψ, θ.

Замечание 3. Фиксируя пару модулей (n_1, n_2), можно отождествить элемент ${}_l\tau_{r_1(n_1),r_2(n_2)}$ с тройкой (l, r_1, r_2). Тогда формулы действия примут более простой вид:

1) $\psi(l, 0, r_2) = (1 - l, 0, n_2 - r_2)$, если $1 \le r_2 < n_2$,
2) $\psi(l, r_1, r_2) = (-l, n_1 - r_1, n_2 - r_2)$, если $1 \le r_1 < n_1$, $1 \le r_2 < n_2$,
3) $\psi(l, r_1, 0) = (-l - 1, n_1 - r_1, 0)$, если $1 \le r_1$.
4) $\theta(l, r_1, r_2) = (l, r_1 + 1, r_2 + 1)$, если $0 \le r_1 \le n_1 - 2$, $0 \le r_2 \le n_2 - 2$,
5) $\theta(l, n_1 - 1, r_2) = (l + 1, 0, r_2 + 1)$, если $0 \le r_2 \le n_2 - 2$,
6) $\theta(l, r_1, n_2 - 1) = (l - 1, r_1 + 1, 0)$, если $1 \le r_1 \le n_1 - 2$,
7) $\theta^{-1}(l, r_1, r_2) = (l, r_1 - 1, r_2 - 1)$, если $r_1 \ge 1$, $r_2 \ge 1$,
8) $\theta^{-1}(l, 0, r_2) = (l - 1, n_1 - 1, r_2 - 1)$, если $r_2 \ge 1$,
9) $\theta^{-1}(l, r_1, 0) = (l + 1, r_1 - 1, n_2 - 1)$, если $r_1 \ge 1$.

§ 3. Действие автоморфизмов ψ, θ на обобщенных подстановках Коля

Как доказано в работе С. Коля [3] группа порожденная подстановками $a = \tau_{0(2),1(2)}$, $b = \tau_{1(2),2(4)}$, $c = \tau_{1(4),2(6)}$ связана с гипотезой Коллатца, известной также как $3x + 1$ — гипотеза. А именно, гипотеза Коллатца справедлива тогда и только тогда, когда группа $\langle a, b, c\rangle$ действует транзитивно на множестве натуральных чисел.

Далее, в качестве приложения найденных формул мы находим орбиты подстановок ${}_l\tau_{0(2),1(2)}$, ${}_l\tau_{1(2),2(4)}$, ${}_l\tau_{1(4),2(6)}$, $l \in \mathbb{Z}$, в группе $ECT(\mathbb{Z})$ относительно группы автоморфизмов $A_0 = \langle\psi, \theta\rangle$.

Орбиты $A_0({}_l\tau_{1(2),0(2)})$ и $A_0({}_l\tau_{0(2),1(2)})$.

Найдем действие группы $A_0 = \langle\psi, \theta\rangle$ на элементах ${}_l\tau_{1(2),0(2)} = (l, 1, 0)$ и ${}_l\tau_{0(2),1(2)} = (l, 0, 1)$.

Так как каждый элемент группы диэдра A_0 однозначно записывается в виде

$$\psi^\varepsilon\theta^m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \varepsilon = 0, 1,$$

то достаточно найти сначала элементы вида $\theta^m(l,1,0)$, $\theta^m(l,0,1)$, а затем $\psi\theta^m(l,1,0)$, $\psi\theta^m(l,0,1)$. Имеем

$$\theta(l,1,0) = (l+1,0,1), \quad \theta(l,0,1) = (l-1,1,0),$$

$$\theta^{-1}(l,0,1) = (l-1,1,0), \quad \theta^{-1}(l,1,0) = (l+1,0,1),$$

$$\psi(l,1,0) = (-l-1,1,0), \quad \psi(l,0,1) = (1-l,0,1).$$

Следовательно,

$$\theta^2(l,1,0) = (l,1,0), \quad \theta^2(l,0,1) = (l,0,1).$$

Итак, θ^2 действует тождественно на элементах $(l,1,0)$ и $(l,0,1)$ (для модулей $(2,2)$). Поэтому орбиты элементов $(l,1,0)$ под действием группы A_0 состоят из элементов

$$A_0(l,1,0) = \{(l,1,0), \quad (l+1,0,1), \quad (-l-1,1,0), \quad (-l,0,1)\},$$

$$A_0(l,0,1) = \{(l,0,1), \quad (l-1,1,0), \quad (1-l,0,1), \quad (-l,1,0)\}.$$

В частности, при $l = 0$ получаем

$$A_0(0,0,1) = \{(0,0,1), \quad (-1,1,0), \quad (1,0,1), \quad (0,1,0)\}.$$

Заметим, что

$$(0,0,1) = {}_0\tau_{0(2),1(2)} = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(2k, 1+2k) =$$

$$= \prod_{k\in\mathbb{Z}}(1+2k, 2k) = {}_0\tau_{1(2),0(2)} = (0,1,0),$$

$$(-1,1,0) = {}_{-1}\tau_{1(2),0(2)} = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(1+2k, 2(k+1)) =$$

$$= \prod_{k\in\mathbb{Z}}(2(k+1), 1+2k) = \prod_{k\in\mathbb{Z}}(2k, 1+2(k-1)) =$$

$$= {}_1\tau_{0(2),1(2)} = (1,0,1),$$

то есть $\theta(0,0,1) = \psi(0,0,1)$. Итак,

$$A_0(0,0,1) = \{(0,0,1), \quad (0,1,0)\}.$$

Далее найдем произведение элементов $(0,0,1)$ и $(1,0,1)$. Имеем

$$(0,0,1)\cdot(1,0,1) = {}_0\tau_{0(2),1(2)}\,{}_1\tau_{0(2),1(2)} =$$

$$= \prod_{k\in\mathbb{Z}}(2k, 1+2k)\prod_{l\in\mathbb{Z}}(2l, 1+2(l-1)) =$$

$$= \prod_{k\in\mathbb{Z}}(2k, 1+2k)\prod_{l\in\mathbb{Z}}(1+2l, 2(l+1)) =$$

$$= \ldots(-4,-3)(-2,-1)(0,1)(2,3)(4,5)(6,7)\ldots\cdot$$

$$\cdot\ldots(-3,-2)(-1,0)(1,2)(3,4)(5,6)\ldots =$$

$$(\ldots,-3,-1,1,3,5,7,\ldots)\cdot(\ldots,4,2,0,-2,-4,-6,\ldots)$$

— произведение двух бесконечных независимых циклов:

$$(1+2k \mapsto 1+2(k+1)), \quad (2k \mapsto 2(k-1)).$$

Следовательно,

$$\left\langle {}_0\tau_{0(2),1(2)}, {}_1\tau_{0(2),1(2)} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2,$$

и

$$\left\langle {}_0\tau_{0(2),1(2)}, \psi \right\rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2, \quad \left\langle {}_0\tau_{0(2),1(2)}, \theta \right\rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2.$$

Обозначим $a = {}_0\tau_{0(2),1(2)}$. Тогда

$$\langle a,\psi,\theta\rangle = \left\langle\, a,\psi,\theta \,|\, a^2=\psi^2=\theta^2=1,\ \psi a\psi=\theta a\theta,\ (\psi\theta)^2=1 \,\right\rangle =$$

$$= \left\langle\, a,\psi,\theta \,|\, a^2=\psi^2=\theta^2=1,\ \psi\theta a=a\psi\theta,\ (\psi\theta)^2=1 \,\right\rangle =$$

$$= \left\langle\, a,\psi,\theta,\varphi \,|\, a^2=\psi^2=\theta^2=1,\ \varphi a=a\varphi,\ \varphi=\psi\theta \,\right\rangle =$$

$$= \left\langle\, a,\theta,\varphi \,|\, a^2=\theta^2=\varphi^2=1,\ (\varphi\theta)^2=1,\ \varphi a=a\varphi \,\right\rangle =$$

$$= \left\langle\, a,\theta,\varphi \,|\, a^2=\theta^2=\varphi^2=1,\ \theta\varphi=\varphi\theta,\ \varphi a=a\varphi \,\right\rangle =$$

$$= \langle\varphi\rangle\times\langle a,\theta\rangle \cong \mathbb{Z}_2\times(\mathbb{Z}_2*\mathbb{Z}_2).$$

Орбита $A_0({}_l\tau_{1(2),2(4)})$.
Найдем действие группы $A_0 = \langle\psi,\,\theta\rangle$ на элементах ${}_l\tau_{1(2),2(4)} = (l,1,2)$.
Имеем

$$\theta(l,1,2) = (l+1,0,3), \quad \theta^2(l,1,2) = (l,1,0),$$

$$\theta^3(l,1,2) = (l+1,0,1), \quad \theta^4(l,1,2) = (l+1,1,2).$$

Итак, $\theta^4(l,1,2)=(l+1,1,2)$. Следовательно, при $m\ge 0$

$$\theta^{4m}(l,1,2)=(l+m,1,2),\quad \theta^{4m+1}(l,1,2)=(l+m+1,0,3),$$

$$\theta^{4m+2}(l,1,2)=(l+m,1,0),\quad \theta^{4m+3}(l,1,2)=(l+m+1,0,1),$$
$$\theta^{-4m}(l,1,2)=(l-m,1,2),\quad \theta^{-4m+1}(l,1,2)=(l-m+1,0,3),$$
$$\theta^{-4m+2}(l,1,2)=(l-m,1,0),\quad \theta^{-4m+3}(l,1,2)=(l-m+1,0,1).$$

Применим автоморфизм ψ

$$\psi\theta^{4m}(l,1,2)=(-l-m,1,2),\quad \psi\theta^{4m+1}(l,1,2)=(-l-m,0,1),$$

$$\psi\theta^{4m+2}(l,1,2)=(-l-m-1,1,0),\quad \psi\theta^{4m+3}(l,1,2)=(-l-m,0,3),$$
$$\psi\theta^{-4m}(l,1,2)=(m-l,1,2),\quad \psi\theta^{-4m+1}(l,1,2)=(m-l,0,1),$$
$$\psi\theta^{-4m+2}(l,1,2)=(m-l-1,1,0),\quad \psi\theta^{-4m+3}(l,1,2)=(m-l,0,3).$$

Орбита $A_0({}_l\tau_{1(4),2(6)})$**.**

Найдем действие группы $A_0=\langle\psi,\,\theta\rangle$ на элементах ${}_l\tau_{1(4),2(6)}=(l,1,2)$. Имеем

$$\theta(l,1,2)=(l,2,3),\quad \theta^2(l,1,2)=(l,3,4),\quad \theta^3(l,1,2)=(l+1,0,5),$$

$$\theta^4(l,1,2)=(l,1,0),\quad \theta^5(l,1,2)=(l,2,1),\quad \theta^6(l,1,2)=(l,3,2),$$
$$\theta^7(l,1,2)=(l+1,0,3),\quad \theta^8(l,1,2)=(l+1,1,4),\quad \theta^9(l,1,2)=(l+1,2,5),$$
$$\theta^{10}(l,1,2)=(l,3,0),\quad \theta^{11}(l,1,2)=(l+1,0,1),\quad \theta^{12}(l,1,2)=(l+1,1,2).$$

Итак,
$$\theta^{12}(l,1,2)=(l+1,1,2)$$

и орбита $\langle\theta\rangle\,(l,1,2)$ бесконечна.

Следовательно,

$$\theta^{12m}(l,1,2)=(l+m,1,2),\quad \theta^{12m+1}(l,1,2)=(l+m,2,3),$$

$$\theta^{12m+2}(l,1,2)=(l+m,3,4),\quad \theta^{12m+3}(l,1,2)=(l+m+1,0,5),$$
$$\theta^{12m+4}(l,1,2)=(l+m,1,0),\quad \theta^{12m+5}(l,1,2)=(l+m,2,1),$$
$$\theta^{12m+6}(l,1,2)=(l+m,3,2),\quad \theta^{12m+7}(l,1,2)=(l+m+1,0,3),$$
$$\theta^{12m+8}(l,1,2)=(l+m+1,1,4),\quad \theta^{12m+9}(l,1,2)=(l+m+1,2,5),$$
$$\theta^{12m+10}(l,1,2)=(l+m,3,0),\quad \theta^{12m+11}(l,1,2)=(l+m+1,0,1).$$

Далее найдем действие автоморфизма ψ

$$\psi\theta^{12m}(l,1,2)=(-l-m,3,4),\quad \psi\theta^{12m+1}(l,1,2)=(-l-m,2,3),$$

$$\psi\theta^{12m+2}(l,1,2)=(-l-m,1,2),\quad \psi\theta^{12m+3}(l,1,2)=(-l-m-1,0,1),$$
$$\psi\theta^{12m+4}(l,1,2)=(-l-m-1,3,0),\quad \psi\theta^{12m+5}(l,1,2)=(-l-m,2,5),$$
$$\psi\theta^{12m+6}(l,1,2)=(-l-m,1,4),\quad \psi\theta^{12m+7}(l,1,2)=(-l-m,0,3),$$
$$\psi\theta^{12m+8}(l,1,2)=(-l-m-1,3,2),\quad \psi\theta^{12m+9}(l,1,2)=(-l-m-1,2,1),$$
$$\psi\theta^{12m+10}(l,1,2)=(-l-m-1,1,0),\quad \psi\theta^{12m+1}(l,1,2)=(-l-m,0,5).$$

§ 4. Заключение

Сформулируем некоторые вопросы для дальнейшего исследования

1. Верно ли равенство $[ECT(\mathbb{Z}),ECT(\mathbb{Z})]=ECT(\mathbb{Z})$?

2. Будет ли группа $ECT(\mathbb{Z})$ простой?

3. Следующий вопрос для группы $CT(\mathbb{Z})$ был сформулирован в Коуровской тетради [2]. Вопрос 18.48 (С. Коль). Верно ли что существует лишь конечное множество целых чисел, которые являются порядками произведения двух транспозиций классов? Естественно исследовать этот вопрос и для обобщенных транспозиций классов.

4. Когда произведение двух обобщенных транспозиций классов имеет бесконечный порядок?

5. Какие конечные порядки могут иметь произведение двух обобщенных транспозиций классов?

Список литературы

1. *Kohl. S.* A simple group generated by involutions interchanging residue classes of the integers // *Math. Z.* 2010. V. 264, N 4. P. 927–938.

2. *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2022.

3. *Kohl. S.* The Collatz conjecture in a group theoretic context // *J. Group Theory* 2017. V. 20, N 5. P. 1025–1030.

References

1. *Kohl. S.* A simple group generated by involutions interchanging residue classes of the integers // *Math. Z.* 2010. V. 264, N 4. P. 927–938.

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 50-62

Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 50-62

2. *The Kourovka Notebook.* Unsolved questions in group theory. Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2022.

3. *Kohl. S.* The Collatz conjecture in a group theoretic context // *J. Group Theory* 2017. V. 20, N 5. P. 1025–1030.

Информация об авторах

Михаил Владимирович Нещадим, Доктор физико-математических наук, доцент

SPIN 7950-7824 AuthorID: 5376

Scopus Author ID 6602439021

Сергей Михайлович Нещадим, Стажер-исследователь, аспирант.

SPIN 8170-7440 AuthorID: 1216447

Scopus Author ID 57355708900

Author Information

Mikhail V. Neshchadim, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

SPIN 7950-7824 AuthorID: 5376

Scopus Author ID 6602439021

Sergey M. Neshchadim, Research intern, PhD student.

SPIN 8170-7440 AuthorID: 1216447

Scopus Author ID 57355708900

Статья поступила в редакцию 04.12.2024;
одобрена после рецензирования 18.06.2025; принята к публикации 07.07.2025

The article was submitted 04.12.2024;
approved after reviewing 18.06.2025; accepted for publication 07.07.2025